BAREM DE CORECTARE
clasa a VIII-a

I

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	E	D	B	C	E	B	E	C

50p

II 11 a) $m_a \geq m_g \Rightarrow \frac{2k+1}{2} = \frac{k+(k+1)}{2} > \sqrt{k(k+1)}$ 3p

$\frac{2k+1}{2}\sqrt{k(k+1)} > \sqrt{k(k+1)} \cdot \sqrt{k(k+1)} = k(k+1) \Rightarrow$

$(2k+1)\sqrt{k(k+1)} > 2k(k+1)$ 2p

$\frac{1}{(2k+1)\sqrt{k(k+1)}} < \frac{1}{2k(k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ 2p

$\frac{1}{3\sqrt{2}} < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$; $\frac{1}{5\sqrt{6}} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \ldots \frac{1}{(2n+1)\sqrt{n(n+1)}} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

însumând se obține

$\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{5\sqrt{6}} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)\sqrt{n(n+1)}} < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{2n+2}$ 3p

b) $a - b = -3 \Rightarrow b = a + 3$ 2p

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) = -3(a^2+ab+b^2) =$

$= -3[a^2 + (a+3)^2 + a(a+3)] = -3(3a^2+9a+9) = -9(a^2+3a+3)$ 4p

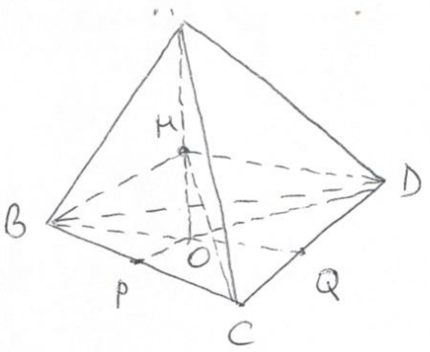
Dar $a^2+3a+3 = a^2 + 2\cdot\frac{3}{2}a + \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = \left(a+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$

$\Rightarrow -9(a^2+3a+3) \leq -9 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{27}{4}$ 2p

12 a) $BC = x$ atunci $OA = OB = OC = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ 2p

În $\triangle AOB$, T. Pitagora, rezultă $OA = \frac{x\sqrt{6}}{3}$ 1p

$\Rightarrow MO = \frac{x\sqrt{6}}{6}$ 2p



În $\triangle MOB$. T. Pitagora $\Rightarrow MB = \frac{x\sqrt{2}}{2}$,

Analog $MD = MC = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ 2p

În $\triangle MBC: BC^2 = MB^2 + MC^2 \overset{R.P.}{\Rightarrow} MB \perp MC$

În $\triangle MBD: BD^2 = MB^2 + MD^2 \Rightarrow MD \perp MB$ 3p

În $\triangle MCD: CD^2 = MC^2 + MD^2 \Rightarrow MC \perp MD$

Cum $MD \perp MB$, $MD \perp MC$, $MB \cap MC = \{M\} \Rightarrow MD \perp (MBC)$ 2p

b) Dacă Q este mijlocul lui [CD] atunci

PQ - linie mijlocie în $\triangle BCD \Rightarrow PQ \parallel BD \Rightarrow$ 3p

$\sphericalangle(MP, BD) = \sphericalangle MPQ$ 2p

MP este mediana în $\triangle MBC$ - dr. în $M \Rightarrow$

$MP = \frac{BC}{2} = \frac{x}{2} = MQ$ 2p

PQ linie mijlocie în $\triangle BCD \Rightarrow PQ = \frac{BD}{2}$ 1p

$\Rightarrow \triangle MPQ$ - echilateral $\Rightarrow m(\sphericalangle MPQ) = 60^\circ$ 2p

10p din oficiu